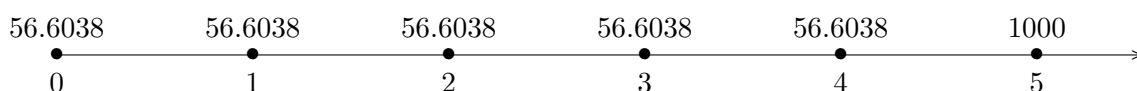


Matematica finanziaria: svolgimento prova di esame del 5 luglio 2005

1. [5 punti cleai, 5 punti altri] Prestiamo 1000€ a un amico. Ci si accorda per un tasso di remunerazione del 6% annuale (posticipato), per un rimborso a rate anticipate annuali di soli interessi, e per un rimborso del capitale alla scadenza del quinto anno. Calcolare nuda proprietà e usufrutto del prestito dopo un anno, sia prima che dopo il pagamento della quota interessi, usando un tasso di valutazione del 5% annuo.

Svolgimento. Il 6% di 1000€ sono 60€. Poiché le quote interessi sono da corrispondere anticipatamente (all'inizio di ogni anno) mentre il 6% è un tasso posticipato (alla fine di ogni anno), dobbiamo scontare 60€ di un anno, e otteniamo come quota interessi anticipata $60/1.06 = 56.6038$. Il grafico dell'ammortamento del prestito è allora



La nuda proprietà del prestito al tempo $t = 1$ (tasso di valutazione del 5%) è

$$\text{nuda proprietà} = \frac{1000}{1.05^4} = 822.702$$

e tale valore chiaramente non cambia se si considera il prestito al tempo 1^+ o al tempo 1^- .

Per l'usufrutto abbiamo invece

$$\begin{aligned}\text{usufrutto}(1^+) &= \frac{56.6038}{1.05} + \frac{56.6038}{1.05^2} + \frac{56.6038}{1.05^3} = 154.146 \\ \text{usufrutto}(1^-) &= \text{usufrutto}(1^+) + 56.6038 = 210.75.\end{aligned}$$

■

2. [4 punti cleai, 4 punti altri] Sia data la legge finanziaria in due variabili

$$r(x, y) = 1.1^{y-x}.$$

Calcolare la forza di interesse, dire se si tratta di una legge finanziaria scindibile e calcolare il montante di proseguimento $M(2, 5)$ al quinto anno di un capitale (investito al tempo 0) che al secondo anno risulta di 10€. Rispondere poi alle stesse domande per la legge

$$r(x, y) = 1.1^{xy-x^2}.$$

Svolgimento. Per la prima legge abbiamo:

$$r(x, y) = 1.1^{y-x} \Rightarrow \delta(x, y) = \frac{r_y(x, y)}{r(x, y)} = \frac{1.1^{y-x} \ln 1.1}{1.1^{y-x}} = \ln 1.1.$$

Poiché la forza di interesse non dipende da x (in questo caso è addirittura costante), la legge in questione è scindibile. Il montante di proseguimento si può allora calcolare “senza passare dal via”:

$$M(2, 5) = 10 \cdot 1.1^{5-2} = 10 \cdot 1.1^3 = 13.31.$$

Per la seconda legge abbiamo:

$$r(x, y) = 1.1^{xy-x^2} \Rightarrow \delta(x, y) = \frac{r_y(x, y)}{r(x, y)} = \frac{x \cdot 1.1^{xy-x^2} \ln 1.1}{1.1^{xy-x^2}} = x \cdot \ln 1.1.$$

Poiché la forza di interesse dipende da x , la legge in questione non è scindibile. Il montante di proseguimento va dunque calcolato passando dal tempo 0:

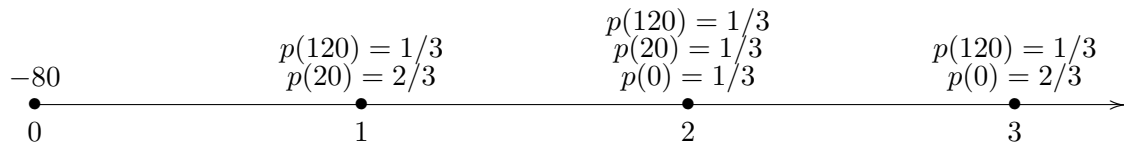
$$M(2, 5) = \frac{10}{r(0, 2)} \cdot r(0, 5) = 10.$$

Notare che la legge finanziaria in questione lascia invariati tutti gli investimenti che cominciano in 0, a causa del fatto che $r(0, y) = 1$.

■

3. [6 punti cleai, 5 punti altri] Si acquistano delle obbligazioni. Il prezzo è 80€, il valore nominale 100€. Le cedole sono di 20€ (annue e posticipate). Le obbligazioni verranno rimborsate progressivamente in tre anni (1/3 alla fine di ciascun anno). Calcolare il tasso di rendimento effettivo per un'obbligazione rimborsata dopo 1, 2, 3 anni. Calcolare poi il tasso di rendimento medio.

Svolgimento. L'acquisto di un'obbligazione si sintetizza nel seguente grafico.



Se il titolo viene rimborsato al primo anno, il suo rendimento effettivo (cioè la soluzione dell'equazione $REA = 0$), si ottiene risolvendo

$$-80 + 120\nu = 0$$

e dunque

$$i_1 = \frac{1}{\nu} - 1 = \frac{120}{80} - 1 = 0.5.$$

Se il titolo viene rimborsato al secondo anno, il suo rendimento effettivo si trova risolvendo l'equazione

$$-80 + 20\nu + 120\nu^2 = 0$$

e dunque

$$i_2 = \frac{12}{-1 + \sqrt{97}} - 1 = 0.356107.$$

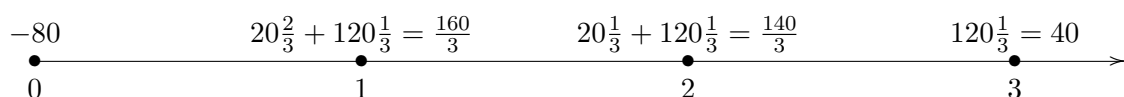
Se il titolo viene rimborsato al terzo anno, il suo rendimento effettivo si trova risolvendo l'equazione

$$-80 + 20\nu + 20\nu^2 + 120\nu^3 = 0$$

che risolta numericamente con il metodo della bisezione fornisce

$$i_3 = 0.312.$$

Per il tasso di rendimento medio dobbiamo calcolare i valori medi delle cedole che riscuoteremo ogni anno. L'operazione finanziaria risultante è



Il rendimento medio si trova allora risolvendo l'equazione

$$-80 + \frac{160}{3}\nu + \frac{140}{3}\nu^2 + 40\nu^3 = 0$$

che fornisce, sempre per via numerica,

$$i_m = 0.364.$$

■

4. [5 punti cleai, 5 punti altri] Un prestito di 3500€ a 5 anni è remunerato con quote di interesse annue posticipate al 12.5% annuo. Si provvede all'ammortamento del prestito mediante versamenti annui costanti su di un fondo che rende il 14% annuo. Determinare l'ammontare della rata annua complessiva (versamento sul fondo più quota interessi), e la misura del fondo accumulato all'inizio del quarto anno.

Svolgimento. Il 12.5% di 3500€ è 437.5€. Visto che la quota capitale viene versata su un fondo, essa non contribuisce alla diminuzione del debito residuo, e dunque la quota interesse rimarrà costante per tutta la durata dell'ammortamento. Il problema è determinare quanto versare sul fondo in maniera

tale da avere 3500€ alla fine dei 5 anni, cioè un classico problema di determinazione rata conoscendo durata, montante e tasso. L'equazione da impostare è

$$R \cdot (1.14^4 + 1.14^3 + 1.14^2 + 1.14 + 1) = 3500$$

che fornisce

$$R = 3500 \frac{1.14 - 1}{1.14^5 - 1} = 529.492.$$

La rata annua complessiva è quindi $529.492 + 437.5 = 966.992\text{€}$.

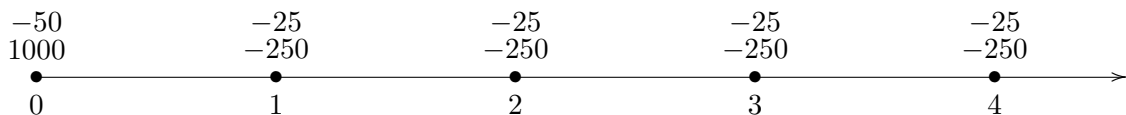
All'inizio del quarto anno (cioè subito dopo aver versato la terza rata) avremo sul fondo un montante pari a

$$R \cdot (1.14^2 + 1.14 + 1) = 529.492 \cdot (1.14^2 + 1.14 + 1) = 1821.24.$$

■

5. [5 punti cleai, 4 punti altri] Calcolare (utilizzando il fattore di sconto approssimato al meglio di due cifre decimali) il TAN e il TAEG di un finanziamento di 1000€ in 4 rate annuali posticipate da 250€, supponendo le spese accessorie pari a 50€ per l'apertura del finanziamento e il 10% di diritti riscossione su ogni rata.

Svolgimento. Questo finanziamento si sintetizza, dal punto di vista del debitore, nel seguente grafico:



Sia TAN che TAEG esistono perchè l'operazione è un finanziamento.

Il TAN è 0, visto che la somma delle rate è uguale alla somma finanziata.

Il TAEG si trova risolvendo

$$f(\nu) = 950 - 275\nu - 275\nu^2 - 275\nu^3 - 275\nu^4 = 0.$$

Poiché

$$f(0.94) > 0, f(0.95) < 0, f(0.945) < 0$$

otteniamo che $\nu \in (0.94, 0.945)$, e possiamo approssimarlo al meglio di due cifre decimali con 0.94. Il TAEG è allora:

$$\text{TAEG} = \frac{1}{\nu} - 1 \simeq 0.06.$$

■

6. [4 punti cleai, 3 punti altri] Una ditta produttrice di videogiochi concepisce un nuovo sparatutto. La produzione di questo videogioco comporterebbe dei costi descritti nel seguente modo:

- 50 ore di lavoro iniziali di programmazione, al costo di 80€ per ora;
- 20 ore di lavoro ogni anno, per la manutenzione del codice, al costo di 50€ per ora;
- 50 centesimi di euro per ogni supporto ottico (cdrom) contenente il videogioco.

Indagini di mercato stimano che:

- il videogioco diventerà obsoleto tra 3 anni esatti;
- Il primo anno si venderanno 10000, il secondo 8000, il terzo 6000 copie del videogioco, al prezzo di 5€ l'una.

Determinare il REA del progetto al tasso di valutazione del 5%.

Svolgimento. Si tratta solo di determinare i numeri da mettere sull'asse dei tempi per rappresentare graficamente questo progetto.

Per la programmazione iniziale del videogioco, si spende $50 \cdot 80 = 4000\text{€}$. Per la manutenzione del codice si spende annualmente $20 \cdot 50 = 1000\text{€}$.

La vendita del videogioco fornirà $10000 \cdot 5 = 50000\text{€}$ il primo anno, $8000 \cdot 5 = 40000\text{€}$ il secondo anno e $6000 \cdot 5 = 30000\text{€}$ il terzo anno. Il costo dei supporti è di $10000 \cdot 0.5 = 5000\text{€}$ il primo anno, $8000 \cdot 0.5 = 4000\text{€}$ il secondo anno e $6000 \cdot 0.5 = 3000\text{€}$ il terzo anno.

Quindi, l'operazione finanziaria è rappresentata da:



Il $\text{REA}(0.5)$ è:

$$\text{REA}(0.5) = -4000 + \frac{44000}{1.05} + \frac{35000}{1.05^2} + \frac{26000}{1.05^3} = 92110.6.$$

■

7. **[3 punti cleai, 3 punti altri]** Si considerino i titoli A, B, C, D dati dalla tabella 1. Se il tasso di valutazione dovesse variare di poco, quale di essi subirebbe la maggior variazione percentuale del proprio valore?

Tabella 1: Titoli A, B, C, D .

anno di pagamento	A	B	C	D
anno 1	59	63	45	0
anno 2	41	19	0	0
anno 3	134	180	0	1

Svolgimento. Il più sensibile a piccole variazioni dei tassi è quello con maggior durata media finanziaria. Essendo tutti titoli di durata 3 anni, nessuno di loro può avere DMF maggiore di 3. Visto poi che c'è uno e un solo $\text{TSC}(3)$, la sua durata media finanziaria è proprio 3 e nessuno degli altri titoli può averla maggiore o uguale. Quindi la risposta è D. ■

8. **[no cleai, 3 punti altri]** Si assuma una struttura per scadenze descritta dalla tabella 2. Supponendo l'esistenza di un tasso a termine $i(1, 4) = 0.04$, si descriva un arbitraggio.

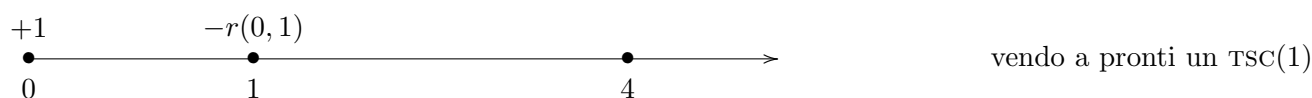
Tabella 2: Tassi spot rilevati per i prossimi 5 anni.

anno	1	2	3	4	5
tasso spot	0.03	0.04	0.05	0.05	0.05

Svolgimento. Calcoliamo il tasso forward atteso per l'intervallo $(1, 4)$. Se il mercato fosse coerente, dovremmo avere $r(0, 1)r(1, 4) = r(0, 4)$, da cui

$$r(0, 1)r(1, 4) = r(0, 4) \Leftrightarrow r(1, 4) = \frac{r(0, 4)}{r(0, 1)} \Leftrightarrow i(1, 4) = \sqrt[3]{\frac{r(0, 4)}{r(0, 1)}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1.05^4}{1.03}} - 1 = 0.0567526 \neq 0.04.$$

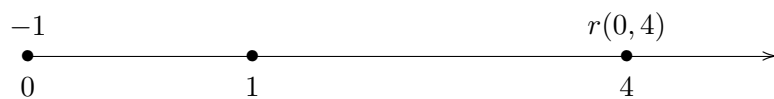
Dunque la presenza di un tasso reale $i(1, 4) = 0.04$ permette di costruire il seguente arbitraggio (poiché $0.04 < 0.0567526$, siamo nel caso $r(0, 1)r(1, 4) < r(0, 4)$):



vendo a pronti un $\text{TSC}(1)$



vendo allo scoperto $r(0, 1)\text{TSC}(1, 4)$



acquisto un TSC(4)

Alla fine dell'arbitraggio disporrò di

$$r(0, 4) - r(0, 1)r(1, 4) = 1.05^4 - 1.03 \cdot 1.04^3 = 0.0568963 > 0.$$

■